Año III 15 de Mayo de 1903 Núm. 5

ANALES

DEL

INSTITUTO DE INJENIEROS DE CHILE

DE LA PARÁBOLA

Teorema propuesto en la clase de Jeometría analítica de la Universidad el año 1901 i demostrado ese mismo año: Si se dividen los lados AB i AC de un triángulo isósceles; a partir del vértice A, en $2\,n$ partes iguales i se unen el primer punto de division de cada uno de los lados con el penúltimo del otro lado, el segundo punto con el antepenúltimo etc., estas rectas son tanjentes a una parábola inscrita en el triángulo i que pasa por los vértices B i C.

Demostracion 1.ª (Fig. 1) Sea $A\,B = A\,C = a$ i el ángulo $B\,A\,C = \theta$. Si el teorema es exacto, la bisectriz $A\,D$ de θ debe ser el eje de la parábola i $D\,E$ la subnormal correspondiente a B. Siendo ahora la subnormal de una parábola igual al semiparámetro (p), se puede determinar, de antemano, el valor de p. En efecto, será

$$(1) \qquad p = \frac{D\,B^2}{A\,D} = \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{a \cos \frac{\theta}{2}} = a\, tj\, \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\,.$$

Por razones de simetría resulta todavía que la cúspide de la parábola debe encontrarse en el punto O de encuentro de la mediana con la bisectriz de θ.

Establecemos, en seguida, un sistema oblícuo de ejes coordenados, formados por los lados del ángulo θ i hacemos $a = 2\,n\,a'$. La ecuacion de la recta que une el punto de division (q) sobre $A\,X$ con el punto de division $(2\,n-q)$ sobre $A\,Y$, es

$$\frac{x}{q\,a'} + \frac{y}{(2\,n-q)\,a'} = 1$$

$$(2) \qquad \text{o sea} \qquad (2\,n-q)\,x + q\,y = q\,(2\,n-q)\,a'.$$

Si pasamos, ahora, de este sistema oblícuo a otro rectangular de las (ξ, η) del oríjen O i cuyo eje de las ξ coincide con la bisectriz de θ, notamos que las coordenadas de O en el sistema primitivo son

$$x_0 = y_0 = \frac{a}{4} = \frac{n\,a'}{2}$$

de modo que las sustituciones correspondientes a la trasformacion de coordenadas son

$$x = \frac{n\,a'}{2} + \xi\,\frac{\text{sen}\,(\theta-\alpha)}{\text{sen}\,\theta} + \eta\,\frac{\text{sen}\,(\theta-\beta)}{\text{sen}\,\theta}$$

$$y = \frac{n\,a'}{2} + \xi\,\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\theta} + \eta\,\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\theta},$$

sustituciones en las cuales α i β significan los ángulos que los ejes de las ξ i de las η forman con el eje de las x.

Siendo ahora

$$\alpha = \frac{\theta}{2} \text{ i } \beta = 90^{\circ} + \frac{\theta}{2}$$

resulta

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{n\,a'}{2} + \frac{\xi}{2\cos\frac{\theta}{2}} - \frac{\eta}{2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}} \\ y &= \frac{n\,a'}{2} + \frac{\xi}{2\cos\frac{\theta}{2}} + \frac{\eta}{2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}} \end{aligned}\right.$$

Introduciendo (3) en (2), resulta, despues de algunas trasformaciones,

$$(4)\qquad \frac{n\,\xi}{\cos\frac{\theta}{2}} - \frac{(n-q)\,\eta}{\text{sen}\,\frac{\theta}{2}} = -a'\,(n-q)^2$$

como ecuacion de la recta que une los puntos (q) sobre $A\ C$ i $(2\,n-q)$ sobre $A\ B$ entre sí.

Si podemos ahora demostrar que la recta (4) es tanjente a la parábola cuyo parámetro hemos fijado de antemano, hemos demostrado el teorema, en atencion a los valores de q que varian entre o i n.

Para este fin, comparamos la recta (4) con una tanjente a la parábola $\eta^2 = 2\,p\,\xi$ en el punto (ξ', η'), o sea que damos a la ecuacion (4) la forma de la ecuacion de la tanjente

$$(5)\qquad \eta\,\eta' = p\,(\xi + \xi'),$$

a saber

$$(6)\qquad (n-q)\,\eta = n\ tj\ \frac{\theta}{2}\left(\xi + \frac{a'\,(n-q)^2\cos\frac{\theta}{2}}{n}\right)$$

Para comparar (6) con (5) será preciso multiplicar los dos miembros de (6) por un factor indeterminado λ.

Obtenemos:

$$\eta^2 = \lambda\,(n - q),\ p = \lambda\, n\, tj\,\frac{\theta}{2},\ \xi' = \frac{a'\,(n-q)^2 \cos\frac{\theta}{2}}{n}$$

La consideracion del punto (ξ', η') como punto de la parábola

$$(7) \qquad \eta^2 = 2\,p\,\xi$$

nos permite determinar el valor de λ.

Resulta

$$\lambda = 2\,a'\,tj\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\,a' \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

luego $$p = a\,tj\,\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

que es, en verdad, el mismo valor de p encontrado en (1).

Por lo tanto, las rectas de que se trata son todas tanjentes a la parábola (7) i los puntos de tanjencia tienen las coordenadas

$$\xi' = \frac{a\,(n-q)^2 \cos\frac{\theta}{2}}{2\,n^2},\ \eta' = \frac{a\,(n-q)\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{n}$$

siendo q un número entero que cumple con $o \lesseqgtr q \lesseqgtr n$.

Demostracion 2.ª (Fig. 2). En vista de que tres rectas cualesquiera que se cortan en 3 puntos pueden considerarse como tanjentes a infinitas parábolas de eje comun, trazamos tres rectas consecutivas, de $(q-1)$ a $(2n-q+1)$, de (q) a $(2n-q)$ i de $(q+1)$ a $(2n-q-1)$ que se cortan en los puntos H, G, F. La paralela trazada por F a $A\,D$ corta la $G\,H$ en el punto de tanjencia M que es el punto medio de $H\,G$. Nos proponemos, por eso, determinar el lugar jeométrico del punto M en caso de que q varia.

Consideremos, primero, dos rectas cualesquiera que corresponden a q i a s; las ecuaciones de tales rectas son en virtud de (2),

$$\begin{aligned}(2n-q)\,x + q\,y &= q\,(2n-q)\,a'\\ (2n-s)\,x + s y &= s\,(2n-s)\,a'\end{aligned}$$

Determinemos, en seguida, su punto de encuentro i hacemos sucesivamamente $s = q - 1$ i $s = q + 1$.

Despues de algunas trasformaciones resulta

$$x=\frac{q\,s\,a'}{2n},\quad y=\frac{(2n-q)\,(2n-s)\,a'}{2n};$$

$s=q-1$ nos da el punto H, de suerte que

$$x_{\mathrm{H}}=\frac{q\,(q-1)\,a'}{2n},\quad y_{\mathrm{H}}=\frac{(2n-q)\,(2n-q+1)\,a'}{2n},$$

$s=q+1$ nos da el punto G; de aquí que

$$x_{\mathrm{G}}=\frac{q\,(q+1)\,a'}{2n},\quad y_{\mathrm{G}}=\frac{(2n-q)\,(2n-q-1)\,a'}{2n}$$

Si designamos las coordenadas del punto medio M de HG por (x, y), resulta

$$x=\frac{x_{\mathrm{G}}+x_{\mathrm{H}}}{2}=\frac{a'\,q^2}{2n},\quad y=\frac{y_{\mathrm{G}}+y_{\mathrm{H}}}{2}=\frac{a'\,(2n-q)^2}{2n}.$$

Eliminando, en fin, a q, obtenemos la ecuacion del lugar jeométrico del punto M con respecto al sistema oblícuo formado por los lados del ángulo θ.

A saber

$$q^2=\frac{2n\,x}{a'}\quad \text{i}\quad q^2-4\,n\,q+4\,n^2=\frac{2\,n\,y}{a'}$$

da

$$q=\frac{x-y+2\,n\,a'}{2\,a'}$$

luego

$$\left(\frac{x-y+2\,n\,a'}{2\,a'}\right)^2=\frac{2\,n\,x}{a'}$$

o bien

$$(x-y+a)^2=4\,a\,x \tag{8}$$

que es la ecuacion de una parábola.

Trasformemos todavia (8) por medio de (3), i resulta, despues de algunas trasformaciones,

$$\eta^2=2\,a\,tj\,\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cdot\xi$$

De aquí que el semiparámetro de la parábola resultante es

$$p = a\ tj\ \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

como mas arriba.

Demostracion. 3.ª (Fig. 1). Sean A_1, A_2 etc. los puntos de division del lado $A\ B$ i P_1, P_2 etc. los puntos de tanjencia correspondientes a las rectas que parten de A_1, A_2 etc. Si estas rectas $A_1\ P_1$, $A_2\ P_2$, etc. son tanjentes a una parábola inscrita en el Δ $A\ B\ C$ i que pasa por B i C, hemos visto que la ecuacion de la curva con respecto al sistema rectangular de las ξ, η, debe ser

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \eta^2 = 2\ p\ \xi \\ \text{i} \qquad p = a\ tj\ \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}. \end{array} \right.$$

Nos proponemos, por eso, demostrar que las coordenadas de los puntos $P_1\ P_2$ etc. satisfacen a las ecuaciones (9), calculando estas coordenadas en atencion a un teorema conocido que relaciona las coordenadas del punto de encuentro de dos tanjentes a una parábola con las coordenadas respectivas de los puntos de la tanjencia. En virtud de este teorema, tenemos

$$(10) \qquad \xi_{A_q} = \sqrt{\xi_B . \xi_{P_q}}, \quad \eta_{Aq} = \frac{\eta_B + \eta_{P\ q}}{2}$$

Ahora bien, se tiene

$$\xi_A = -n\ a' \cos\frac{\theta}{2}\ ;\ \xi_{A_1} = -(n-1)\ a' \cos\frac{\theta}{2};\ \text{etc.}$$

$$(11) \qquad \xi_{Aq} = -(n-q)\ a' \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\eta_A = 0;\ \eta_{A_1} = a' \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\ ;\ \text{etc.}$$

$$(12) \qquad \eta_{Aq} = q\ a' \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\ .$$

Introduciendo (11) i (12) en (10), resulta

$$-(n-q)\ a' \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{n\ a' \cos\frac{\theta}{2} .\ \xi_{Pq}}$$

$$q\ a' \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{2\ n\ a' \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \eta_{Pq}}{2}$$

o sea

$$(13)\begin{cases} \xi_{Pq} = \dfrac{(n-q)^2 a' \cos\dfrac{\theta}{2}}{n} = \dfrac{a\,(n-q)^2 \cos\dfrac{\theta}{2}}{2\,n^2} \\ \eta_{Pq} = -2\ (n-q)\ a' \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = -\dfrac{a\ (n-q) \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}}{n} \end{cases}$$

i fácilmente se verifica que

$$\eta_{Pq}{}^2 = 2\ p\ \xi_{Pq} \quad \text{i} \quad p = a\ tj\,\frac{\theta}{2}\ \operatorname{sen}\ \frac{\theta}{2}.$$

Por razones de simetría es, ademas, claro que tambien las rectas que parten de los puntos de division de $A\ C$ son tanjentes a la parábola (9) lo que concluye la demostracion.

AUGUSTO TAFELMACHER