SOBRE UN PROCEDIMIENTO NUEVO

PARA REPRESENTAR LA LONJITUD DE LA CIRCUNFERENCIA POR MEDIO DE UNA RECTA

El problema de la cuadratura, o lo que es lo mismo, de la rectificacion de la circunferencia del círculo es mui antiguo. Data de tiempo de los antiguos ejipcios desde algunos miles de años, i aun hace 20 años, no pertenecia de algun modo a los problemas resueltos, como talvez el *perpetum mobile* (movimiento continuo) para el mecánico i la piedra filosofal para el químico. El honor de haber eliminado definitivamente este problema matemático, pertenece al matemático aleman profesor Lindemann, quien en el año 1882 logró demostrar, que era imposible construir el valor de π por ser una magnitud trascendental. De modo que cada ensayo de representar la circunferencia de un círculo por medio de una recta, no podrá tener otro objeto que representarla *aproximadamente*. Aunque existen ya varios procedimientos tendentes a este fin, entre los cuales es el mas conocido el del jesuita polaco Kochanski del año 1685, me permito comunicar otro procedimiento fácil de grabarse en la memoria:

Dibújese un triángulo rectángulo con un cateto igual al diámetro doble, i el otro igual al diámetro del círculo cuya circunferencia desea medirse. Los $\frac{3}{5}$ del perímetro de este triángulo da la lonjitud de la circunsferencia del círculo con una aproximacion de $\frac{1}{20000}$.

La demostracion es mui sencilla: en el triángulo ABC (fig. 1) el cateto AB representa al diámetro del círculo $=1$;

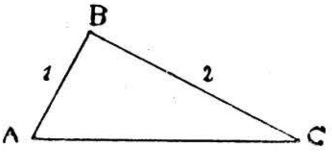

Fig. 1

$BC=2$; la hipotenusa $AC=\sqrt{5}$, i por consiguiente, el perímetro del triángulo ABC:

$$P = 1 + 2 + \sqrt{5} = 3 + 2.236068$$

$$= 5.236068$$

$$\tfrac{3}{5}P = 3.1416408$$

$$\pi = 3.1415926\ldots.$$

$$\text{Diferencia}\ldots. = 0.0000482,$$

$$\text{Aprox}\ldots\ldots. = \frac{1}{20\,000}.$$

Por lo que respecta a la construccion jeométrica, no se presta a dificultad. Se traza una recta igual a la suma de los tres lados del triángulo, i siguiendo el método conocido para dividir una recta en un número arbitrario de partes iguales, se divide en $\frac{3}{5}$ partes.

Tambien puede procederse de manera que despues de hacer AD igual al perímetro del triángulo ABC, se traza partiendo del punto D, la recta DE paralelamente al cateto CB i despues se describe con EA una circunferencia hácia AD, dividiéndose así esta recta en el punto F en relacion de 2 : 3. Se prueba esto fácilmente si se traza la perpendicular EG.

Tenemos entónces:

$$AG : GE = 1 : 2 = GE : GD = 2 : 4$$

$$AG : GD = 1 : 4$$

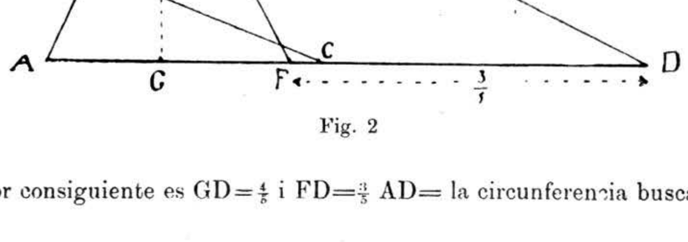

Fig. 2

por consiguiente es $GD = \frac{4}{5}$ i $FD = \frac{3}{5}$ AD= la circunferencia buscada

De esta manera se reduce la construccion del valor π como línea recta al siguiente teorema:

La circunferencia de un círculo del diámetro $= 1$ es aproximadamente igual a $\frac{3}{5}$ de perímetro de un triángulo rectángulo con los valores 1 i 2 como catetos o espresado por medio de una fórmula

$$x = \frac{3}{5}\left(1+2+\sqrt{5}\right)$$

$$\text{I)} \qquad x = \left(3+\sqrt{5}\right) 0{,}6$$

Nos parece bastante interesante demostrar que el mismo resultado puede obtenerse de otra manera por medio de la «seccion áurea».

La seccion áurea aplicada al número de Ludolph (π) da para el valor menor 1.19998, (casi 1,2) que en lo sucesivo denominaremos con a. Si al total buscado llamamos x tenemos la siguiente proporcion ajustada a la seccion áurea:

$$a : (x-a) = (x-a) : x$$

$$(x-a)^2 = ax$$

$$x^2 - 2\,ax + a^2 = ax$$

$$x^2 - 3\,ax = -a^2$$

$$x^2 = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^2 - a^2}$$

$$= \frac{3a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Si el diámetro del círculo es igual a 1 i si se sustituye por a el valor aproximado 1,2, resulta:

$$x = 3\left(\frac{1{,}2}{2}\right) + \frac{1{,}2}{2}\sqrt{5}$$

$$= 3\,(0{,}6) + 0{,}6\sqrt{5} \qquad \text{i}$$

$$\text{II)} \qquad x = \left(3+\sqrt{5}\right) 0.6$$ un valor idéntico al de la ecuacion I)

El resultado final es como hemos demostrado ya ántes

$$x = 3{,}1416408\ldots.$$

Espresado en palabras podria definirse el segundo procedimiento, como sigue:

Para reproducir la circunferencia aproximadamente como línea recta, se busca para una recta igual *a* $1\frac{1}{5}$ del diámetro, tomada como porcion menor, toda la recta segun la seccion áurea.

La solucion constructiva se deduce de la fig. 3.

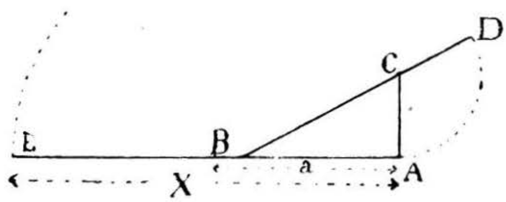

Fig. 3

Sobre una recta $=1\frac{1}{5}$ de diámetro $=a=AB$ se traza una perpendicular $AC=\frac{a}{2}$, se une *B* con *C* i se prolonga *BC* i *AB*. Si ahora su base $CD=AC=\frac{a}{2}$ i $BE=BD$, es entónces $x=AE$, la circunferencia del círculo.

Demostracion:

$$BC^2 = a^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$BC = BD - \frac{a}{2} \quad \text{i } BD = x - a$$

$$\text{entónces es } BC = x - a - \frac{a}{2} = x - \frac{3a}{2}$$

$$BC^2 = \left(x - \frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \quad \text{de lo que resulta}$$

$$x^2 + a^2 = 3ax \quad \text{i sustraido de ámbos miembros } 2ax$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 3ax - 2ax$$

o $\quad (x-a)^2 = ax$ i escrito en forma de una proporcion

$$a : (x-a) = (x-a) : x$$

De esta manera se ha ajustado a las condiciones de la seccion áurea i haciendo $a=(1{,}2)$ obtenemos la ecuacion nuevamente.

$$\text{II)} \qquad x = (3 + \sqrt{5})\ 0{,}6$$

El pensamiento que me ha guiado para encontrar el primer procedimiento ha sido el siguiente:

Para números enteros son construibles sus raíces. Si podia encontrarse una, que aunque fuese con aproximacion de algunos decimales estuviera con π o sus múltiplos en una relacion aproximada racional, habria posibilidad de dibujar el valor trascendental con mas o ménos exatitud como línea recta. Con este objeto me formé una pequeña tabla de productos del número menor con π i comparé estos productos con una tabla que contenia raíces cuadradas. No necesité buscar mucho porque el quintuplo de π:

$$5\ \pi = 15{,}70796\ldots.$$

correspondia, en cuanto a los decimales, *a* la raiz de 45

$$\sqrt{45}=6{,}70820$$

Ahora es 45 la suma de los cuadrados 9 i 36, cuyas raíces cuadradas son 3 i 6 i fueron elejidas para 2 catetos entre las cuales cabia $\sqrt{45}$ perfectamente como hipotenusa formando un triángulo rectángulo cuyo perímetro tenia el valor:

$$\begin{aligned} \mu &= 3+6+\sqrt{45} \\ &= 9+6{,}708204 \\ &= 15{,}708204 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{5}\mu = 3{,}1416408$$

Siendo este valor primero que encontré:

$$\pi' = \frac{1}{5}\left(9+\sqrt{45}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(9+3\sqrt{5}\right)$$

mui incómodo para una construccion jeométrica, necesitando demasiado espacio i mas trabajo, recorté los lados del triángulo rectángulo a $\frac{1}{3}$ de su lonjitud i tomé $\frac{3}{5}$ en vez de $\frac{1}{5}$ de su suma.

La fórmula era entónces:

$$\pi' = \frac{3}{5}\left(3+\sqrt{5}\right)$$

Lo que me sujirió la idea de la seccion áurea, fué la circunstancia, que en éste i en el primer procedimiento mio juega el triángulo rectángulo con los catetos en relacion de 1,2 un papel importante i, por lo tanto, hacia presumir un concordancia que como hemos he podido observar, existia realmente.

Rengo, Julio 3 de 1900.

CONRADO WICKE