CALCULO DE VIGAS CONTÍNUAS

POR EL MÉTODO DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA

POR

RÈGULO ANGUITA

(Conclusion)

La propiedad de las líneas de influencia de los T de tener trozos comunes en todos los tramos permite trazar en un solo depurado las líneas de todas las secciones o paños de un tramo. Por eso para el caso de tres tramos se trazarian dos depurados como los de las figuras (33) i (34), se levantarian las ordenadas $\overline{dd'}$, $\overline{ee'}$, $\overline{xb}$, $\overline{x'c'}$ i se unirian por rectas los puntos como d' e' b c' ... para completar las líneas de influencia en los paños.

Un ejemplo numérico del puente de «Los Morros» permitirá aclarar mas estas ideas:

Supongamos que se quiera obtener los T_{max} positivo i negativo para el paño *14* del 1.er tramo dentro del cual está la seccion $0.70\, l_1$ para la cual se calcularan los M_{max}.

El depurado correspondiente se dibujó a las escalas:

$$\text{de lonjitud } \lambda = 1 \text{ cm} = 2 \text{ metros}$$
$$\text{de ordenadas } \eta = 20 \text{ cms} = 1 \text{ unidad}$$

I la superficie que encierra la línea de influencia (que se necesita tambien), queda a la escala:

$$\eta\,\lambda = 20 \text{ cms}^2 = 2 \times 1 \text{ unidad metro}$$
$$\xi = 20 \text{ cms}^2 = 2 \textit{ metros}$$

Se elijió una escala de ordenadas bastante grande a fin de aumentar en cuanto fuera posible la precision del resultado i se obtuvo así una línea de influencia como la que se ve a menor escala en la fig. (35).

Tratándose de obtener el T_{14} negativo máximo por ejemplo, se cargará la viga como se indica en la mismo figura, estendiendo la carga rodante p_r hasta la seccion x en el 1.er tramo i en todo el 2.° tramo. ¿Hasta qué punto es lójico fraccionar la carga en esa forma?; es una objeciou que salta a la vista i que no se cree del caso discutir aquí. Es claro que si en vez de una carga uniformemente repartida se tiene un tren de fuerzas móviles no podria aceptarse un fraccionamiento semejante i habria que tantear la posicion del tren que produce el máximo.

De todos modos la posicion de la carga que se indica en la figura, produciría el T_{14} máximo maximum i por eso se han aceptado esos valores para el puente de «Los Morros» como un nuevo coeficiente de seguridad, teniendo en vista que en los cálculos de puentes metálicos en jeneral, hai tanta incertidumbre en cuanto a los esfuerzos que no se toman en cuenta, como las tensiones secundarias etc., que a menudo se desprecian, porque sin conducir a resultados mui seguros, complican inutilmente los cálculos.

Supongamos trazadas en el dibujo las ordenadas a plomo de los nudos en que obran las fuerzas P_m, P_r (fig. 35) i aceptemos las notaciones siguientes:

$\overline{T}_{m+1}$ = Esfuerzo de corte negativo máximo en el paño $m+1$.

$\Sigma_0^{-x} y_I$ = La suma de las ordenadas negativas, en el 1.er tramo desde y_1 hasta y_{m-1} inclusive.

$\Sigma_x^{+1} y_I$ = La suma de las ordenadas positivas en el 1.er tramo desde y_m hasta el apoyo 1.

$\Sigma\, y_{II}$ = La suma de las ordenadas del 2.° tramo con su signo.

$\Sigma\, y_{III}$ = » » » » » 3.er » » » »

$\Sigma_0^{-(m-2)} y_I$ = La suma de las ordenadas negativas del 1.er tramo desdè y_2 hasta y_{m-2} inclusive.

Otros términos parecidos que aparezcan en las fórmulas tienen análogo significado.

Entónces para un paño $m+1$ cualquiera del 1.er tramo el esfuerzo de corte que ocasiona el peso muerto vale (fig. 35):

$$\overline{T}_{14}{}^{P_m} = P_m\left(\Sigma_0^{-x} y_I + \Sigma_x^{+1} y_I + \Sigma\, y_{II} + \Sigma\, y_{III}\right)$$

Por lo que hace a la carga rodante estendida hasta x, las concentraciones P_r a plomo de los nudos son válidos solamente hasta t mitad del paño m_1, desde que la lonjitud $m\,x$ es variable dentro del paño $m+1$ i que ademas la línea de influencia presenta un jarrete a plomo de y_m.

Por eso, para considerar la carga que obra en la estension $t\,x$, hai que recurrir a la fuerza p_r uniformemente repartida i a la superficie σ encerrada por la línea de influencia i aclarada en la fig. (36)

$$p_r\, \sigma$$

se deberá agregar a los T producidos por las fuerzas P_m i P_r para tener el T total.

σ puede espresarse en funcion de las ordenadas de la línea de influencia, que hai que medir en todo caso.

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\, x\, y_m + \frac{y_{m-1} + y_m}{2}\, \lambda - \frac{y_{m-1} + \dfrac{y_{m-1} + y_m}{2}}{2}\, \frac{\lambda}{2}$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2} \left\{ x\, y_m + \frac{\lambda}{4}\,(3\, y_m - y_{m-1}) \right\}$$

$$p_r\, \sigma = \tfrac{1}{2}\, p_r \left\{ x\, y_m + \frac{\lambda}{4}\,(3\, y_m - y_{m-1}) \right\}$$

El término dentro del paréntesis es una superficie que hai que reducir a su valor real con la escala (ξ) del depurado.

Las fuerzas concentradas P_r producen un $\overset{-}{T}{}_{m+1}^{P_r}$ que vale:

$$\overset{-}{T}{}_{m+1}^{P_r}\, P_r = P_r\, (\overset{-(m-1)}{\Sigma_o}\, y_I + \Sigma\, y_{II})$$

Entónces la espresion completa de los T_{m+1}, positivo i negativo, es la siguiente:

$$\overline{T}_{m+1} = P_m\, (\overset{-}{\Sigma}{}_o^{x}\, y_I + \overset{+}{\Sigma}{}_x^{1}\, y_I + \Sigma\, y_{II} + \Sigma\, y_{III}) + P_r\, (\overset{-(m-1)}{\Sigma_o}\, y_I + \Sigma\, y_{II}) \qquad (28)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, p_r \left\{ x\, y_m + \frac{\lambda}{4}\,(3\, y_m - y_{m-1}) \right\}$$

$$\overset{+}{T}_{m+1} = P_m\, (\overset{-}{\Sigma}{}_o^{x}\, y_I + \overset{+}{\Sigma}{}_x^{1}\, y_I + \Sigma\, y_{II} + \Sigma\, y_{III}) + P_r\, (\overset{+}{\Sigma}{}_{m+2}^{1}\, y_I + \Sigma\, y_{III}) \qquad (29)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, p_r \left\{ x'\, y_{m+1} + \frac{\lambda}{4}\,(3\, y_{m+1} - y_{m+2}) \right\}$$

Para un paño del 2.° tramo resultan espresiones análogas i de la misma forma para otros paños de vigas contínuas de mas de tres tramos.

Las espresiones (28) i (29) aparecen a primera vista un poco complicadas; son sin embargo bastante cómodas para calcular con ellas cuando junto con apuntar en una tabla la suma de las ordenadas medidas en el dibujo, se efectúan tambien las sumas parciales que entran en las fórmulas.

En la tabla siguiente se consignan las ordenadas medidas en centímetros en el dibujo en referencia i ademas las sumas parciales correspondientes.

PAÑOS DEL 1.er TRAMO

ORDENADAS NEGATIVAS (—)		ORDENADAS POSITIVAS (+)	
Primer tramo	Sumas parciales	Primer tramo	Sumas parciales
Ctms.	Ctms.	Ctms.	Ctms.
$y_1 = -$ 1.36	— 1.36	$y_{18} = +$ 0.54	+ 0.54
$y_2 = -$ 2.65	— 4.01	$y_{17} = +$ 1.18	+ 1.72
$y_3 = -$ 3.97	— 7.98	$y_{16} = +$ 1.88	+ 3.60
$y_4 = -$ 5.28	— 13.26	$y_{15} = +$ 2.66	+ 6.26
$y_5 = -$ 6.55	— 19.81	$y_{14} = +$ 3.47	+ 9.73
$y_6 = -$ 7.80	— 27.61	$y_{13} = +$ 4.42	+ 14.15
$y_7 = -$ 9.04	— 36.65	$y_{12} = +$ 5.38	+ 19.53
$y_8 = -$ 10.25	— 46.90	$y_{11} = +$ 6.43	+ 25.96
$y_9 = -$ 11.40	— 58.30	$y_{10} = +$ 7.52	+ 33.48
$y_{10} = -$ 12.47	— 70.77	$y_9 = +$ 8.61	+ 42.09
$y_{11} = -$ 13.58	— 84.35	$y_8 = +$ 9.75	+ 51.84
$y_{12} = -$ 14.64	— 98.99	$y_7 = +$ 10.96	+ 62.80
$y_{13} = -$ 15.57	— 114.56	$y_6 = +$ 12.24	+ 75.04
$y_{14} = -$ 16.53	— 131.09	$y_5 = +$ 13.46	+ 88.50
$y_{15} = -$ 17.35	— 148.44	$y_4 = +$ 14.73	+ 103.23
$y_{16} = -$ 18.15	— 166.59	$y_3 = +$ 16.00	+ 119.23
$y_{17} = -$ 18.84	— 185.43	$y_2 = +$ 17.33	+ 136.56
$y_{18} = -$ 19.45	— 204.88	$y_1 = +$ 18.64	+ 155.20

PAÑOS DEL 1.er TRAMO

ORDENADAS DEL	
2.º tramo	3.er tramo
Ctms.	Ctms.
$y_1 = -0.47$	$y_1 = +0.13$
$y_2 = -0.84$	$y_2 = +0.23$
$y_3 = -1.16$	$y_3 = +0.34$
$y_4 = -1.39$	$y_4 = +0.42$
$y_5 = -1.56$	$y_5 = +0.47$
$y_6 = -1.66$	$y_6 = +0.50$
$y_7 = -1.73$	$y_7 = +0.51$
$y_8 = -1.72$	$y_8 = +0.52$
$y_9 = -1.66$	$y_9 = +0.50$
$y_{10} = -1.59$	$y_{10} = +0.49$
$y_{11} = -1.49$	$y_{11} = +0.47$
$y_{12} = -1.35$	$y_{12} = +0.43$
$y_{13} = -1.22$	$y_{13} = +0.38$
$y_{14} = -1.06$	$y_{14} = +0.33$
$y_{15} = -0.86$	$y_{15} = +0.27$
$y_{16} = -0.68$	$y_{16} = +0.20$
$y_{17} = -0.50$	$y_{17} = +0.13$
$y_{18} = -0.30$	$y_{18} = +0.07$
$y_{19} = -0.14$	
$\Sigma y_{II} = -\underline{21.38}$ ctms.	$\Sigma y_{III} = +\underline{6.39}$ ctms.

Con estos elementos i recordando las escalas de ordenados, lonjitudes i superficies del depurado resulta de las fórmulas (28) i (29) para el paño 14 a que se ha aludido, introduciendo los ordenados i ademas x', x', λ en centímetros:

$$\overline{T}_{14} = \tfrac{1}{20} P_m \left(\overset{-x}{\Sigma_0} y_I + \overset{+1}{\Sigma_x} y_{II} + \Sigma y_{III}\right) + \tfrac{1}{20} P_r \left(\overset{-18}{\Sigma_0} y_I + \Sigma y_{II}\right) +$$

$$+ 0.05\, p_r \left\{ x\, \overline{y}_{18} + \frac{\lambda}{1} (3\, \overline{y}_{13} - \overline{y}_{12} \right\}$$

$$\overset{+}{T}_{14} = \tfrac{1}{20} P_m \left(\overset{-0}{\Sigma_x} y_I + \overset{+1}{\Sigma_x} y_I + \Sigma y_{II} + \Sigma y_{III}\right) + \tfrac{1}{20} P_r \left(\overset{+15}{\Sigma_1} y_I + \Sigma y_{III}\right) +$$

$$+ 0.05\, p_r \left\{ x' \overset{+}{y}_{14} + \frac{\lambda}{4} (3\, \overset{+}{y}_{14} - \overset{+}{I}_{15}) \right\}$$

Los valores de T se obtienen en kilos o toneladas segun se introduzcan en las fórmulas P_m, P_r i p_r en kilos o toneladas; x i x' se miden precisamente conjuntamente con las ordenadas, basta medir una de las dos, puesto que:

$$x' = \lambda - x$$

Para el paño *14*:

λ = comun para todos = 1.39 *cms.*, x = 1.16 cms., x' = 0.23 cms. $\frac{\lambda}{4}$ = 0 347 cms.

Ademas son conocidos ya:

P_m = *4.87* toneladas , P_r = 4,773 toneladas i p_r = *1.72* tons. p. m. c.

Entónces:

$$\overline{T}_{14} - \tfrac{1}{20} \times 4.87 (-114{,}56 + 9.73 - 21{,}38 + 6.39) + \tfrac{1}{20} \times 4{,}773 (-98.99 - 21.38) -$$
$$- 0.05 \times 1.72 \{ 1.16 \times 15.57 + 0.347 (3 \times 15.57 - 14.64) \}$$

$$\overset{+}{T}_{14} = \tfrac{1}{20} \times 4.87 (-114.56 + 9.73 - 21.38 + 6.39) + \tfrac{1}{20} \times 4{,}773 (6.26 + 6.39) +$$
$$+ 0.05 \times 1.72 \{ 0.23 \times 3.47 + 0{,}347 (3 \times 3{,}47 - 2{,}66) \}$$

Efectuando las operaciones indicadas se encuentra:

$$\overline{T}_{14} = -\underline{61.38}\ \textit{toneladas} = -\underline{61380}\ \text{kilos}$$
$$\overset{+}{T}_{14} = -\underline{25{,}63}\ \textit{toneladas} = -\underline{25630}\ \text{kilos}$$

Cabe observar aquí nuevamente que $\overline{T}_{14}$ no es necesariamente positivo; resulta de cargar la parte positiva de la línea de influencia i es el mínimo esfuerzo de corte negativo que puede producirse en ese paño.

De una inspeccion detenida de las líneas de influencia de los momentos i esfuerzos de corte resulta, que el efecto de las cargas en tramos que distan mas de tres apoyos de la seccion que se considera, es casi insignificante i por lo tanto puede suprimirse en los depurados el trazado de la línea de influencia en esos tramos.

En todo caso éstas u otras simplificaciones dependerán de la aproximacion con que se desee calcular los esfuerzos.

A este respecto es importante recordar que el mismo fundamento teórico de las vigas contínuas adolece de errores casi inevitables. En efecto, al aplicar el teorema de Clapeyron para conócer los momentos en los apoyos, se supone que el momento de inercia de la viga es constante en toda su estension. Esta hipótesis está mui léjos de ser verdadera en los enrejados metálicos, de donde resulta que los esfuerzos calculados con los métodos corrientes difieren a veces bastante de los efectivos (véase nota Cart i Portes, páj. 19).

Cart i Portes cita algunos ejemplos de puentes calculados por Weyrauch, Koechlin, etc., en los cuales la diferencia entre los esfuerzos calculados, i los verdaderos que resultan de introducir en las fórmulas los momentos de inercia correspondientes, alcanzan a 65 °/₀₀ i 25 °/₀₀ en el 2.° caso para el momento en el apoyo *1* de una viga contínua de tres tramos de 72.70 mts., 104.55 mts. i 72.70 mts. de luz.

Cart i Portes han encontrado diferencias aun mayores que las que se citan.

Por otra parte, en todas las fórmulas hasta aquí deducidas, se han supuesto los apoyos a nivel; conviene calcular a veces el aumento de tensiones que orijinaría una lijera desnivelacion de los apoyos. Si se colocan por construccion con cierta pendiente se deberá tomar en cuenta esta circunstancia en los cálculos.

Como se ve, todas estas causas producen errores superiores a los que resultarían de despreciar cierta estension de la línea de influencia i se ha creido útil ponerlos de manifiesto aquí, para prevenir la exajeracion poco práctica de aumentar sin mayor provecho, la precision en el cálculo de los momentos i esfuerzos de corte. Por la misma razon no es de esperar que un cálculo analítico conduzca a mejores resultados; un depurado dibujado con un poco de cuidado es suficiente.

Para terminar, abrigo la esperanza de haber puesto en claro las ventajas del método de las líneas de influencia en el cálculo de vigas contínuas; método que no sería práctico, aun disponiendo de tablas como las de Cart i Portes, para tramos sobre dos apoyos, para los cuales existen otros procedimientos mas cortos i seguros.

Santiago, Agosto de 1908.

RÉGULO ANGUITA GATICA.