ANALES
DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE
Calle San Martín N.° 352 - Casilla 487 - Teléf. 88841 - Santiago - Chile

Año XXXII — Mayo de 1932 — N.° 5

Manuel Pérez Román

Sobre el Método de Slaby para el trazado de curvas diferenciales

EN el número de los ANALES, correspondiente a Marzo de este año, se publica un interesante artículo del señor Carlos Krumm sobre métodos gráficos para el trazado de curvas diferenciales. Me permito agregar un pequeño comentario a las observaciones del señor Krumm, respecto del método de Slaby. Se sabe que este método es muy usado tanto por su sencillez en la aplicación como por la precisión que proporciona en los resultados. Es por esto que creo interesante anotar claramente tanto los fundamentos del método como la precisión que con él se alcanza.

Fundamentos.—Se parte del teorema de los incrementos finitos que relaciona una función f (x) con su derivada.

$$1)\qquad f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x+\theta h).$$

Del factor indeterminado θ sólo se sabe que

$$o < \theta < 1$$

Cabe preguntarse ¿qué valor toma θ para valores muy pequeños de h? Para responder hay que averiguar la relación de dependencia que guarda el factor θ respecto de las variables x y h, de las cuales evidentemente tiene que depender. Puede adoptarse como ley de dependencia una relación de la forma:

$$2)\qquad \theta = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots.$$

en que los coeficientes a son funciones sólo de x. La determinación de estos coeficientes hace ver que:

3) $$\theta = \frac{1}{2} + \frac{f'''(x)}{24 \cdot f''(x)} h + \frac{f^{IV}(x) \cdot f''(x) - [f'''(x)]^2}{48 \cdot [f''(x)]^2} h^2 + \ldots$$

relación que es válida siempre que la función f (x) posea segunda derivada distinta de cero. Cumplida esta condición, en aquellos puntos de la curva en que $f''(x)$ es finita y distinta de cero, se verifica que:

4) $$\lim_{h \to o} \theta = \frac{1}{2}$$

es decir que, en aquellos casos, para valores muy pequeños de h, en primera aproximación puede escribirse:

5) $$\theta = \frac{1}{2}$$

Con esto, el teorema 1) se convierte en la relación aproximada

6) $$f(x+h) - f(x) = h \cdot f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

tanto más aproximada cuanto más pequeño es h. Es esta relación aproximada 6) la que sirve de fundamento al Método de Slaby. En efecto, el problema que resuelve Slaby es el de dibujar la curva derivada de una curva dada, cuya ecuación f (x), naturalmente, no se conoce. Escribiendo 6) en la forma:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

se ve que el procedimiento para dibujar la curva derivada $f'(x)$ es el siguiente: la curva f (x) se traslada paralelamente, en el sentido del eje de las X, hacia la izquierda en la magnitud h; la curva que resulta tiene por ecuación $\gamma = f(x+h)$; se divide por *h* la diferencia de las ordenadas de estas curvas para una misma abscisa x; el cuociente es la ordenada de la curva derivada $f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$ en el punto de abscisa $x + \frac{h}{2}$. Trasladando esta curva hacia la derecha en $\frac{h}{2}$ se obtiene el gráfico de la curva derivada buscada $f'(x)$.

Precisión del resultado.—Es claro: la curva derivada obtenida es sólo aproximada de la verdadera curva derivada $f'(x)$, a causa de que se ha obtenido partiendo de una relación aproximada (relación 6). Evidentemente el error cometido será el mismo que se comete al aceptar la relación 6) como exacta. El señor Krumm hace ver que este error aproximadamente es igual a $\frac{h^2}{24} \cdot f'''(\xi)$, siendo ξ un valor entre x y $x + h$. El raciocinio del señor Krumm es algo artificial y enredado; por esto creo preferible el raciocinio siguiente, que proporciona inmediatamente el error buscado. En efecto, según la fórmula de Taylor, tenemos:

$$7) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} \cdot f''(x) + \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \frac{h^3}{4!} \cdot f^{IV}(\xi_1)$$

$$8) \quad f'\left(x + \frac{h}{2}\right) = f'(x) + \frac{h}{2} \cdot f''(x) + \frac{h^2}{4.2!} f'''(x) + \frac{h^3}{8.3!} f^{IV}(\xi_2)$$

siendo ξ_1 un valor entre x y $x + h$, y ξ_2 un valor entre x y $x + \frac{h}{2}$.

Restando 8) de 7), resulta:

$$9) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'\left(x + \frac{h}{2}\right) = \text{error} = \frac{h^2}{24} \cdot f'''(x) + \frac{h^3}{48} \left[2 f^{IV}(\xi_1) - f^{IV}(\xi_2)\right]$$

Tratándose de una función continua, puede admitirse que para valores ξ_1 y ξ_2 muy próximos entre sí, $f^{IV}(\xi_1) = f^{IV}(\xi_2)$. En todo caso, la igualdad 9) hace ver que el error es de orden superior de pequeñez con respecto a la pequeñez de h. En primera aproximación (de 2.° orden, en este caso), se puede admitir que para valores muy pequeños h,

$$\text{error} \leq \left| \frac{h^2}{24} \cdot f'''(x) \right|$$

En aquellos casos en que un valor pequeño de h dificulta la construcción de la curva derivada $f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$, conviene tomar un valor de h no tan pequeño, pero en este caso hay que tomar en cuenta el 2.° término del error en la fórmula 9), poniendo en ella $f^{IV}(\xi_1) = f^{IV}(\xi_2) = f^{IV}(x)$.